

Научная статья

УДК 517.962.22

DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-111-130

К ИДЕНТИФИКАЦИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ИЗ ЗАДАННОГО ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Андрей Александрович Ломов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск,
Россия

lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Аннотация

Исследуется задача Прони идентификации коэффициентов автономных разностных уравнений по наблюдениям решений с шумом и неизвестными аддитивными возмущениями из произвольного заданного линейного многообразия. Доказано свойство «проективности» вариационной целевой функции. Для двух основных типов уравнений получены критерии и достаточные условия идентифицируемости.

Ключевые слова и фразы

Разностные уравнения, идентификация коэффициентов, возмущения из заданного линейного многообразия, вариационная задача Прони, условия идентифицируемости.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

Для цитирования

Ломов А. А. К идентификации разностных уравнений по наблюдениям решений с возмущениями из заданного линейного многообразия // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 111-130. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-111-130

ON THE IDENTIFICATION OF DIFFERENCE EQUATIONS BY OBSERVATIONS OF SOLUTIONS WITH PERTURBATIONS FROM A GIVEN LINEAR MANIFOLD

Andrey A. Lomov

Sobolev Institute of mathematics of SB RAS, Novosibirsk State University,
630090, Novosibirsk, Russia

lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Abstract

We study the Prony identification problem of coefficients of a linear difference equation from noisy solutions observations with unknown additive perturbations from an arbitrary given linear manifold. The property of "projectivity" of the variational objective function is proved. Criteria and the sufficient conditions of identifiability are obtained for two main types of equations.

Keywords

difference equations, parameter identification, perturbations from a given linear manifold, variational Prony problem, identifiability conditions.

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008)

For citation

Lomov A. A. On the identification of difference equations by observations of solutions with perturbations from a given linear manifold // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 111-130. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-111-130

§ 1. Введение

Задача построения разностных уравнений по возмущенным наблюдениям временных зависимостей (задача Прони) известна уже более двухсот лет [1, 2]. Известные подходы к ее решению по-разному учитывают априорную информацию о свойствах возмущений.

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 111-130

Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 111-130

В статье исследуется случай, когда возмущения вместе со случайными аддитивными шумами содержат неопределенные детерминированные составляющие из заданного линейного многообразия. Это многообразие может быть описано 1) набором базисных векторов или 2) системой линейных уравнений. Обычно используются автономные однородные разностные уравнения. Тогда возмущения являются квазимногочленами, к которым относятся гармонические, экспоненциальные функции, многочлены и их произведения. Этот второй случай изучен сравнительно полно; предложены алгоритмы фильтрации возмущений и идентификации их уравнений [3, разделы 4, 6, 14], [4, раздел 5], в том числе совместно с уравнениями для невозмущенных наблюдений [5, 6].

В отличие от работ [5, 6], здесь нас будет интересовать случай многообразий возмущений, представленных не системами линейных уравнений, а произвольным набором базисных векторов, в общем случае не являющихся квазимногочленами. Примерами являются многообразия ступенчатых, импульсных, кусочно-линейных по времени и т. п. функций.

Известно [7, 8], что в задачах типа Прони без детерминированных составляющих [1, 2, 9], [10, глава 11] статистически состоятельные решения обеспечиваются вариационными (проективными) целевыми функциями [9, 11]. В статье будет показано, что добавление детерминированных аддитивных составляющих к наблюдениям сохраняет свойство проективности; как следствие, для поиска решения оказывается возможным применить известные вычислительные алгоритмы на основе нелинейных обратных итераций [12, 13, 14, 15].

В первом разделе ставится задача идентификации параметров объекта и возмущений с вариационной целевой функцией; во втором разделе доказывается свойство проективности и дается описание множества всех «истинных» наблюдений, для которых минимум целевой функции по параметрам принимает наименьшее возможное нулевое значение. В третьем разделе даются условия идентифицируемости параметров по «истинным» (наилучшим возможным) наблюдениям.

Длинные доказательства вынесены в приложение.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим объект, описываемый разностным уравнением

$$x_{k+n} + \alpha_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0x_k = \beta_nu_{k+n} + \dots + \beta_0u_k, \quad k = \overline{1, N-n}. \quad (1)$$

Здесь $u_k, x_k \in \mathbb{R}$ — отсчеты сеточных функций, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_0 \neq 0$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению по наблюдениям

$$\tilde{x}_k \doteq x_k + s_k^x + \eta_k^x, \quad \tilde{u}_k \doteq u_k + s_k^u + \eta_k^u, \quad k = \overline{1, N-n}.$$

Известно, что $\eta_k^{x,u} \in \mathbb{R}$ — случайные величины, распределенные одинаково и независимо между собой и для разных k , с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{M}\eta_k^{x,u} = 0$, дисперсией $\mathbf{D}\eta_k^{x,u} = \sigma$ и ограниченным носителем распределения, диаметр которого при $\sigma \rightarrow 0$ стремится к нулю ¹ $\sim O(\sigma)$, $s_k^{x,u} \in \mathbb{R}$ — детерминированные возмущения².

Условия устойчивости, минимально-фазовости, управляемости [3] на систему (1) не налагаются, при этом существенной является конечность интервала наблюдения $\overline{1, N}$.

Определим в \mathbb{R}^{2N} векторы из отсчетов сеточных функций³

$$\begin{aligned} z &\doteq [u_1; \dots; u_N; x_1; \dots; x_N], \\ s &\doteq [s_1^u; \dots; s_N^u; s_1^x; \dots; s_N^x], \\ \eta &\doteq [\eta_1^u; \dots; \eta_N^u; \eta_1^x; \dots; \eta_N^x] \end{aligned} \quad (2)$$

и запишем систему уравнений (1) в матричном виде:

$$Gz = 0, \quad (3)$$

$$G \doteq [B_0 \mid B_1 \mid A_0 \mid A_1] \in \mathbb{R}^{(N-n) \times 2N}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} [B_0 \mid B_1] &\doteq - \left[\begin{array}{ccc|ccc} \beta_0 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ & & \beta_0 & \vdots & \ddots & & & \\ & & & \beta_0 & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_0 & \dots & \dots & \beta_n \end{array} \right], \\ [A_0 \mid A_1] &\doteq \left[\begin{array}{ccc|cccc} \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ & & \alpha_0 & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_0 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

¹Это условие позволяет выполнять разложение целевой функции в степенной ряд по малым σ .

²Многомерные системы вида (1) с матричными коэффициентами не рассматриваются ради упрощения изложения.

³Используем обозначения: $[A \ B] \doteq [A, B]$, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \doteq [A; B]$.

Определим вектор коэффициентов уравнения (1)

$$\gamma \doteq [-\beta_0; \dots; -\beta_n; \alpha_0; \dots; \alpha_{n-1}; 1] \doteq [-\beta; \alpha] \doteq [\theta; 1], \quad (5)$$

и назовем θ вектором параметров.

Будем предполагать, что вектор детерминированных возмущений s (2) лежит в линейном многообразии с известным базисом S :

$$s = S\pi,$$

где $S \in \mathbb{R}^{2N \times q}$ — матрица с линейно независимыми столбцами, $\pi \in \mathbb{R}^q$ — подлежащий определению вектор координат. На матрицу S налагается ограничение

$$\text{im } S \cap \ker G = 0, \quad (6)$$

которое означает, что возмущения s не являются решениями уравнения (3).

Вариационная целевая функция для состоятельной идентификации [7] коэффициентов уравнения (1) имеет вид [9]⁴

$$J = (\tilde{z} - z - S\pi)^\top (\tilde{z} - z - S\pi) \rightarrow \min_{\pi, z, \theta: G_\theta z = 0}. \quad (7)$$

Решением задачи будет сходящийся за конечное число шагов алгоритм вычисления вектора коэффициентов $\hat{\theta}$, координат $\hat{\pi}$ и сигнала \hat{z} , лежащих в заданной малой окрестности $E \subset \mathbb{R}^{2N+q+2n+1}$ ($\text{diam } E \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$) точки глобального минимума целевой функции (7).

§ 3. Свойства целевой функции

Обозначим $\overline{V} \subset \mathbb{R}^M$ ортогональное дополнение линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^M$: $\overline{V} \perp V$, $\overline{V} + V = \mathbb{R}^M$.

Пусть \overline{A} («ортогональное дополнение A ») обозначает матрицу с числом строк M , равным числу строк в матрице A , и со свойствами

$$\text{im } \overline{A} + \text{im } A = \mathbb{R}^M, \quad \overline{A}^\top A = 0. \quad (8)$$

Дополнение \overline{A} определено неоднозначно. Во всяком случае, предполагаем, что оно минимально по числу столбцов. Система столбцов составной матрицы $[\overline{A}, A]$ содержит базис всего пространства \mathbb{R}^M . Если столбцы A линейно независимы, то $A = \overline{\overline{A}}$. Согласно (8),

$$\text{im } \overline{A} = \overline{\text{im } A}, \quad \ker \overline{A}^\top = \text{im } A. \quad (9)$$

⁴Здесь и далее \top — символ транспонирования.

Обозначим H матрицу, столбцы которой образуют базис многообразия решений разностного уравнения (1), (3). Верны равенства

$$\text{im } H = \ker G, \quad G^\top = \overline{H}.$$

Условие (6) равносильно нулевому пересечению

$$\text{im } S \cap \text{im } H = 0. \quad (10)$$

Предложение 1. Для произвольных фиксированных значений переменных θ, π минимум J (7) по переменным z достигается в точке

$$\begin{aligned} \hat{z} &= (I - \Pi)(\check{z} - S\pi), \\ \Pi &\doteq G^\top CG, \quad C \doteq (GG^\top)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что Π есть матрица ортогонального проектора на подпространство $\text{im } G^\top = \text{im } \overline{H}$, тогда $I - \Pi$ есть проектор на $\text{im } H$, т.е. на многообразие решений системы разностных уравнений $Gz = 0$. Следовательно, $(I - \Pi)(\check{z} - S\pi)$ есть точка глобального минимума J по z при фиксированных θ, π . \square

Подставляя значение $z = \hat{z}(\theta, \pi)$ (11) в выражение для целевой функции (7) и используя свойства проекторов $\Pi = \Pi^2$, $(I - \Pi) = (I - \Pi)^2$, получим целевую функцию для переменных θ, π :

$$\begin{aligned} J(\theta, \pi) &= (\check{z} - S\pi)^\top \Pi (\check{z} - S\pi) = \\ &= (\Pi\check{z} - \tilde{S}\pi)^\top (\Pi\check{z} - \tilde{S}\pi), \quad \tilde{S} \doteq \Pi S. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда вытекает следующая формула для оптимального значения $\hat{\pi}$.

Предложение 2. Для произвольного фиксированного значения переменной θ и оптимального значения $z = \hat{z}$ (11) минимум J (7) по переменным π достигается в точке

$$\hat{\pi} = \left(\tilde{S}^\top \tilde{S} \right)^{-1} \tilde{S}^\top \Pi \check{z}. \quad (13)$$

Существование обратной матрицы в (13) гарантировано следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть столбцы S линейно независимы и строки G линейно независимы, $G^\top (GG^\top)^{-1} G \doteq \Pi$. Верны утверждения:

- (I) $\text{rank } \Pi S = \text{rank } GS$,
- (II) $\text{im } S \cap \ker G = 0 \Leftrightarrow \text{rank } \Pi S = \text{rank } S$.

Доказательство. (I) Следует из линейной независимости столбцов матрицы $G^T (GG^T)^{-1}$. (II) От противного, пусть $\text{rank } \Pi S < \text{rank } S$, т. е. столбцы матрицы ΠS линейно зависимы: $\exists \varphi \neq 0 \Pi S \varphi = 0$. Последнее ввиду (I) равносильно $GS\varphi = 0$ и равносильно $0 \neq S\varphi \in \ker G$, что означает $\text{im } S \cap \ker G \neq 0$. Рассуждения обратимы, что доказывает лемму. \square

После подстановки оптимальных значений $z = \hat{z}$ (11) и $\pi = \hat{\pi}$ (13) в выражение для целевой функции J (7) получим целевую функцию для переменных θ :

$$J(\theta) = (\Pi \hat{z} - \tilde{S} \hat{\pi})^T (\Pi \hat{z} - \tilde{S} \hat{\pi}) = \hat{z}^T (\Pi - \tilde{\Pi})^T (\Pi - \tilde{\Pi}) \hat{z}, \quad (14)$$

$$\tilde{\Pi} \doteq \tilde{S} (\tilde{S}^T \tilde{S})^{-1} \tilde{S}^T.$$

Лемма 2. Пусть Π — проективная матрица, и для некоторой матрицы S произведение ΠS имеет линейно независимые столбцы. Обозначим $\tilde{\Pi}$ проектор на $\text{im } \Pi S$. Верны свойства: 1) $\Pi \tilde{\Pi} = \tilde{\Pi} = \tilde{\Pi} \Pi$; 2) $\Pi - \tilde{\Pi}$ есть проектор: $(\Pi - \tilde{\Pi})^2 = \Pi - \tilde{\Pi}$.

Доказательство. 1. Ввиду вложения $\text{im } \tilde{\Pi} = \text{im } \Pi S \subseteq \text{im } \Pi$ для произвольного вектора x верно $\Pi \tilde{\Pi} x = \tilde{\Pi} x = \tilde{\Pi} \Pi x$. 2. С учетом последних равенств получаем

$$(\Pi - \tilde{\Pi})^2 = (\Pi + \tilde{\Pi} - \Pi \tilde{\Pi} - \tilde{\Pi} \Pi) = \Pi - \tilde{\Pi},$$

т. е. $\Pi - \tilde{\Pi}$ — проектор. \square

Пользуясь леммой 2, можем написать окончательное выражение

$$J(\theta) = \hat{z}^T (\Pi - \tilde{\Pi}) \hat{z}. \quad (15)$$

Проективность (идемпотентность) и симметричность матрицы квадратичной формы в (15) гарантирует неотрицательную определенность целевой функции $J(\theta)$.

Следующая теорема описывает все точки минимума $J(\theta)$.

Теорема 1. Пусть Π — ортогональный проектор на $\text{im } \bar{H}$, и S — матрица с линейно независимыми столбцами такая, что $\text{rank } \Pi S = \text{rank } S$. Обозначим $\tilde{\Pi}$ проектор на $\text{im } \Pi S$. Тогда $\hat{z}^T (\Pi - \tilde{\Pi}) \hat{z} = 0$ равносильно

$$\hat{z} \in \text{im } (I - \Pi) + \text{im } S = \text{im } H + \text{im } S.$$

Доказательство. См. приложение. \square

Следствие 1. В условиях теоремы 1 матрица $\Pi - \tilde{\Pi}$ есть проектор на ортогональное дополнение к подпространству $\text{im } H + \text{im } S$.

Доказательство. Достаточно заметить, что ввиду леммы 2

$$J = \tilde{z}^\top (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} = \tilde{z}^\top (\Pi - \tilde{\Pi})^\top (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z},$$

тогда $J = 0 \Leftrightarrow (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} = 0$. По теореме 1 последнее равносильно

$$\tilde{z} \in \text{im } H + \text{im } S.$$

Учитывая, что $\Pi - \tilde{\Pi}$ есть проектор (лемма 2), получаем доказываемое утверждение. \square

§ 4. Условия идентифицируемости параметра θ

Под идентифицируемостью параметра θ (5) понимаем взаимную однозначность отображения

$$\theta \mapsto \text{im } H(\theta) + \text{im } S \quad (16)$$

в некоторой области $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$. Если Θ — малая окрестность точки θ , то говорится о локальной идентифицируемости.

Вначале будем рассматривать произвольные матрицы $H = H(\theta)$, S при условии (10).

Теорема 2. Параметр θ идентифицируем в области Θ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\Delta H = H \Delta P_H + S \Delta P_S \quad (17)$$

относительно тройки матриц $\Delta H \doteq H(\theta + \Delta\theta) - H(\theta)$, ΔP_H , ΔP_S при $\theta + \Delta\theta \in \Theta$ имеет единственное решение $\Delta H = 0$, $\Delta P_H = 0$, $\Delta P_S = 0$.

Доказательство. Неидентифицируемость равносильна существованию допустимого ($\theta + \Delta\theta \in \Theta$) изменения матрицы $\Delta H \doteq H(\theta + \Delta\theta) - H(\theta)$, которое не затрагивает подпространство $\text{im } H + \text{im } S = \text{im } [H, S]$:

$$\text{im } [H + \Delta H, S] = \text{im } [H, S].$$

С учетом нулевого пересечения $\text{im } H \cap \text{im } S = 0$ (линейной независимости столбцов $[H, S]$) последнее равносильно уравнению

$$[H + \Delta H, S] = [H, S] \begin{bmatrix} I + \Delta P_H & 0 \\ \Delta P_S & I \end{bmatrix},$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению (17). Теорема доказана. \square

Пусть F :

$$F^\top = \overline{H}, \quad FH = 0 \quad (18)$$

— матрица ортогонального дополнения к H .

Следствие 2. Параметр θ идентифицируем в области Θ , если уравнение

$$F\Delta H = FS\Delta P_S \quad (19)$$

относительно пары матриц $\Delta H \doteq H(\theta + \Delta\theta) - H(\theta)$, ΔP_S при $\theta + \Delta\theta \in \Theta$ имеет единственное решение $\Delta H = 0$, $\Delta P_S = 0$.

Доказательство. Уравнение (19) следует из (17) ввиду $FH = 0$. Далее теорема 2. \square

Получим критерий локальной идентифицируемости в терминах матрицы F (18) (условие (4) на вид F не налагается).

Теорема 3. Параметр θ локально идентифицируем тогда и только тогда, когда уравнение

$$dF \cdot H = FS dP_S \quad (20)$$

относительно пары матриц $dF \doteq F(\theta + d\theta) - F(\theta)$, dP_S имеет единственное решение $dF = 0$, $dP_S = 0$.

Доказательство. См. приложение. \square

Ввиду $FH = 0$ всегда верно $dF \cdot H + F dH = 0$, поэтому имеет место следующий вариант теоремы 3. Этот вариант в локальном случае усиливает достаточное условие следствия 2 до критерия.

Теорема 4. Параметр θ локально идентифицируем тогда и только тогда, когда уравнение

$$F dH = FS dP_S \quad (21)$$

относительно пары матриц $dH \doteq H(\theta + d\theta) - H(\theta)$, dP_S имеет единственное решение $dH = 0$, $dP_S = 0$.

Рассмотрим случай системы (1), (3) с матрицей $F = G$ вида (4).

Определение 1. Назовем вектор $w \doteq [w_1; \dots; w_{N-n}]$ импульсной функцией системы (1), если $w = [x_{n+1}; \dots; x_N]$, где $[x_{n+1}; \dots; x_N]$ есть решение системы (1) с функцией $u = [1; 0; \dots; 0]$ в правой части при нулевых начальных условиях $[x_1; \dots; x_n] = [0; \dots; 0]$. Вследствие определения $w_1 = \beta_0 \neq 0$.

Теорема 5. В системе (1), (3) с матрицей G (4) при $N > q + 2n$ параметр θ локально идентифицируем, если выполнено любое из трех достаточных условий на область Θ : 1) фиксирован вектор α ; 2) фиксирован вектор β ; 3) допустимые приращения $d\alpha, d\beta$ не связаны линейным соотношением

$$\begin{bmatrix} d\beta_0 \\ \vdots \\ d\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha_0 \\ \vdots \\ d\alpha_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. См. приложение. □

Рассмотрим случай однородного уравнения

$$x_{k+n} + \alpha_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0x_k = 0, \quad k = \overline{1, N-n}, \quad (22)$$

$$z = [x_1, \dots, x_N], \quad Gz = 0, \\ G \doteq \begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & & 0 \\ & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Ассоциируем теплицевую матрицу (23) с характеристическим многочленом разностного уравнения (22)

$$\alpha(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

и введем обозначение для матрицы G (23)

$$G = G(\alpha) \doteq T_{\alpha(\zeta)}.$$

Определение 2. Вектор (сеточную функцию) $x \in \mathbb{R}^N$ будем называть квазимногочленом степени n ($< N - 1$), если он является решением некоторого однородного разностного уравнения (22) порядка n : $\exists \alpha(\zeta)$: $\deg \alpha(\zeta) = n$, $T_{\alpha(\zeta)}x = 0$, и при этом не существует уравнения (22) меньшего порядка $m \in \overline{1, n-1}$, $T_{\mu(\zeta)}x = 0$, $\deg \mu(\zeta) = m$, решением которого являлся бы вектор x .

В этом определении учтено, что из уравнения $T_{\alpha(\zeta)}x = 0$ следует $T_{\alpha(\zeta)\nu(\zeta)}x = 0$ для любого многочлена $\nu(\zeta)$; для многочленов $\nu_i(\zeta)$ ненулевой степени верны вложения

$$\ker T_{\alpha(\zeta)} \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\nu_1(\zeta)} \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\nu_1(\zeta)\nu_2(\zeta)} \subset \dots$$

Обозначим $Q_n \subset \mathbb{R}^N$ множество всех квазимногочленов порядка $\leq n$.

Теорема 6. Если столбцы s_i матрицы $S \doteq [s_1, \dots, s_q]$ (16) не являются квазимногочленами степени $2n$ или ниже: $s_i \notin Q_{2n}$, $i = \overline{1, q}$, — то в однородной системе (22) с матрицей G (23) параметр $\theta \doteq [\alpha_0; \dots; \alpha_{n-1}]$ глобально идентифицируем (без ограничений на область $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$).

Доказательство. См. приложение. □

§ 5. Приложение

5.1. Доказательство теоремы 1. Первое, $\tilde{z}^\top (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} = 0 \Leftrightarrow \tilde{z}^\top (\Pi - \tilde{\Pi})^2 \tilde{z} = 0 \Leftrightarrow (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} = 0$. Далее, пусть

$$\tilde{z} = (I - \Pi)\omega_1 + S\omega_2,$$

тогда с учетом обозначения $\tilde{P}S \doteq \tilde{S}$

$$\begin{aligned} (\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} &= (\Pi - \tilde{\Pi}) ((I - \Pi)\omega_1 + S\omega_2) = \\ &= (\Pi - \tilde{\Pi}) S\omega_2 = \tilde{S}\omega_2 - \tilde{S}\omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Обратно, пусть $(\Pi - \tilde{\Pi}) \tilde{z} = 0$, тогда

$$\Pi \tilde{z} = \tilde{\Pi} \tilde{z} = \Pi S (S^\top \Pi S)^{-1} S^\top \Pi \tilde{z},$$

или $(\Pi \doteq UU^\top, U^\top U = I)$

$$U^\top \tilde{z} = U^\top S (S^\top UU^\top S)^{-1} S^\top UU^\top \tilde{z}.$$

Разложим \tilde{z} на ортогональные слагаемые $\tilde{z} = z_{\parallel} + z_{\perp} \doteq U\omega_{\parallel} + \overline{U}\omega_{\perp}$. Из последнего уравнения получаем, что ω_{\perp} может быть любым, а ω_{\parallel} подчиняется уравнению

$$\omega_{\parallel} = U^\top S (S^\top UU^\top S)^{-1} S^\top U\omega_{\parallel},$$

из которого следует $\omega_{\parallel} \in \text{im } U^T S$ и $z_{\parallel} \in \text{im } UU^T S = \text{im } \Pi S$. Получили импликацию

$$\left(\Pi - \tilde{\Pi} \right) \tilde{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{z} \in \text{im } \bar{U} + \text{im } \Pi S.$$

Осталось заметить, что верны равенства

$$\begin{aligned} \text{im } \bar{U} + \text{im } \Pi S &= \text{im } \bar{U} + \text{im } ([\Pi - I] S + S) = \\ &= \text{im } \bar{U} + \text{im } S = \text{im } (I - \Pi) + \text{im } S, \end{aligned}$$

из которых следует $\tilde{z} = (I - \Pi) \omega_1 + S \omega_2$. Теорема доказана.

5.2. Доказательство теоремы 3. Выберем представление $F \doteq [F_0, F_1]$, где F_1 — неособенная квадратная подматрица в F (с точностью до перестановки столбцов F такая подматрица всегда существует). Без ограничения общности (см. замечание в конце доказательства) можно положить

$$H = \begin{bmatrix} I_{N+n} \\ -F_1^{-1} F_0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

По предложению 2 локальная идентифицируемость сводится к неразрешимости уравнения

$$dH = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^{-1} (dF_1) F_1^{-1} F_0 - F_1^{-1} dF_0 \end{bmatrix} = H dP_H + S dP_S$$

относительно ненулевых dH, dP_H, dP_S . Последнее равенство запишем в виде

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_1^{-1} (dF_1) F_1^{-1} F_0 - F_1^{-1} dF_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -F_1^{-1} F_0 \end{bmatrix} dP_H + \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \end{bmatrix} dP_S.$$

Получили систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} dP_H &= -S_0 dP_S, \\ F_1^{-1} (dF_1) F_1^{-1} F_0 - F_1^{-1} dF_0 &= -F_1^{-1} F_0 dP_H + S_1 dP_S. \end{aligned}$$

С учетом первого уравнения запишем второе в виде

$$F_1^{-1} (dF_1) F_1^{-1} F_0 - F_1^{-1} dF_0 = (F_1^{-1} F_0 S_0 + S_1) dP_S.$$

Учитывая обозначение $dF \doteq [dF_0, dF_1]$, перепишем уравнение, умножив слева на F_1 :

$$-dF_0 + (dF_1) F_1^{-1} F_0 = F S dP_S,$$

или

$$-dF \cdot H = FS dP_S.$$

Нетрудно увидеть, что множество решений этого уравнения не изменяется при замене базиса подпространства $\text{im } H$ (с соответствующей заменой матрицы dP_S), поэтому представление (24) не является ограничительным. Теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 5.

Предложение 3. Матрица «дополнения» H (18), (24) для G^\top (4) может быть выбрана в виде

$$H = \left[\begin{array}{c|cc} I_{N+n} & & \\ -A_1^{-1} [B_0 \mid B_1 \mid A_0] & & \end{array} \right] = \tag{25}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} I_n & & & 0 & & 0 \\ \hline 0 & & & I_{N-n} & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & & I_n \\ \hline \rho_{1,1} & \dots & \rho_{n,1} & w_1 & & 0 & \chi_{1,1} & \dots & \chi_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & w_2 & w_1 & & \vdots & & \vdots \\ \rho_{1,N-n} & \dots & \rho_{n,N-n} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \hline & & & w_{N-n} & \dots & w_2 & w_1 & \chi_{1,N-n} & \dots & \chi_{n,N-n} \end{array} \right],$$

где $[w_1; \dots; w_{N-n}]$ — импульсная функция системы (1) (см. определение 1), $\chi_i = [\chi_{i,1}; \chi_{i,2}; \dots; \chi_{i,N-n}]$ — решение системы (1) с нулевой правой частью $u \equiv 0$ и начальными условиями

$$[x_1; \dots; x_n] = [0; \dots; \underbrace{1; \dots; 0}_i], \quad i = \overline{1, n},$$

и $\rho_i = [\rho_{i,1}; \rho_{i,2}; \dots; \rho_{i,N-n}]$ — решение системы (1) с нулевыми начальными условиями и правой частью

$$[u_1; \dots; u_n; \dots; u_N] = [0; \dots; \underbrace{1; \dots; 0}_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Прямо следует из определений (4), представления (24) и свойства автономности системы (1). Уместно учесть, что матрицы A_1, B_1 теплицевые нижнетреугольные, следовательно, матрицы A_1^{-1} и $A_1^{-1}B_1$ также теплицевые нижнетреугольные. \square

Обозначим h_i i -й столбец матрицы H (25) и dp_i — i -й столбец матрицы dP_S :

$$H \doteq [h_1, \dots, h_{N+n}], \quad dP_S \doteq [dp_1, \dots, dp_{N+n}].$$

Уравнение (20) запишем в виде

$$dG \cdot h_i = GS dp_i, \quad i = \overline{1, N+n}. \quad (26)$$

Из теплицевой структуры матрицы G (4) следует

$$dG \cdot h_i = V(h_i) d\gamma,$$

где матрица $V(z)$ для z (2) формируется следующим образом:

$$V(z) \doteq \left[\begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} & x_1 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+2} & x_2 & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{N-n} & u_{N-n+1} & \dots & u_N & x_{N-n} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{array} \right]$$

(верно тождество $Gz \equiv V(z)\gamma$). Условие (26) принимает вид

$$V(h_i) d\gamma = GS dp_i, \quad i = \overline{1, N+n}. \quad (27)$$

Рассмотрим матрицы $V(h_i)$. Из (25) следует

$$V(h_{n+1}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & w_1 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & \ddots & w_1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & w_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & w_{N-2n} & \dots & \dots & w_{N-n} \end{array} \right], \quad (28)$$

для $i = \overline{n+2, N-n-1}$

$$V(h_i) \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & w_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & & & w_1 & & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & w_{N-2n-i+1} & \dots & w_{N-n-i+1} \end{array} \right],$$

$$V(h_{N-n}) \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & w_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & & 0 & w_1 & \dots & w_{n+1} \end{array} \right]. \quad (29)$$

Из (27) получаем

$$[V(h_{n+1}) d\gamma, \dots, V(h_{N-n}) d\gamma] = GS [dp_{n+1}, \dots, dp_{N-n}]. \quad (30)$$

Учитывая «скользящий» вид матриц $V(h_i)$ (28)-(29), перепишем левую часть уравнения (30):

$$\begin{aligned} [V(h_{n+1}) d\gamma, \dots, V(h_{N-n}) d\gamma] &= \\ &= \begin{bmatrix} d\psi_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ d\psi_n & & d\psi_0 \\ & \ddots & \vdots \\ * & & d\psi_n \end{bmatrix} \doteq \Psi = GS [dp_{n+1}, \dots, dp_{N-n}]. \quad (31) \end{aligned}$$

По построению

$$d\psi \doteq \begin{bmatrix} d\psi_0 \\ \vdots \\ d\psi_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} d\beta + \begin{bmatrix} 0 & & w_1 \\ & \ddots & \vdots \\ w_1 & \dots & w_{n+1} \end{bmatrix} d\alpha.$$

Обратим внимание, что при $d\psi \neq 0$ матрица Ψ (31) имеет линейно независимые столбцы, при этом их число $N - 2n$ строго больше числа q столбцов матрицы GS (по условию теоремы). Получаем, что ранг матрицы в левой части уравнения (31) строго больше ранга матрицы в правой части, следовательно, уравнение (31) может быть совместным только при нулевом векторе $d\psi$, т. е. при выполнении соотношения

$$\begin{bmatrix} d\beta_0 \\ \vdots \\ d\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha_0 \\ \vdots \\ d\alpha_n \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Если соотношение (32) не выполнено, то уравнение (31) и уравнение (26) имеют только нулевое решение, и по теореме 3 параметр θ локально идентифицируем.

Пусть $d\beta = 0$. Тогда если (32), то $d\alpha = 0$, что означает локальную идентифицируемость. Если не (32), то $d\psi \neq 0$ и уравнение (31) несовместно, что также означает локальную идентифицируемость. Аналогично разбирается случай $d\alpha = 0$. Теорема доказана.

5.4. Доказательство теоремы 6. Заметим, что всякий квазимногочлен x степени n представим формулой

$$x_k = \sum_{i=1}^{l \leq n} (c_{i,0} + c_{i,1}k + \dots + c_{i,n_i}k^{n_i-1}) \zeta_i^k \sin(\omega_i k + \varphi_i), \quad (33)$$

где $\varphi_i, c_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\zeta_i, \omega_i \in \mathbb{R}^+$, $n_1 + \dots + n_l = n$, l — число различных корней характеристического многочлена разностного уравнения, решением которого является x , n_i — кратность i -го корня [16].

Лемма 3. Пусть $G = T_{\alpha(\zeta)}$ есть теплицевая матрица вида (23), и $H = \overline{G^T}$ — базис подпространства $\ker G$ (т. е. столбцы матрицы H образуют фундаментальную систему решений разностного уравнения (22)). Тогда для каждого многочлена $\omega(\zeta)$ той же степени, что и $\alpha(\zeta)$, можно определить матрицу $\Delta H \doteq H(\omega) - H(\alpha)$, при этом линейная оболочка столбцов ΔH вложена в линейное подпространство $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$.

Доказательство. Пусть $h(\alpha)$ — произвольный столбец $H(\alpha)$, тогда $h(\alpha) \in \ker T_{\alpha(\zeta)}$ и $h(\omega) \in \ker T_{\omega(\zeta)}$. Из выражения (33) следует, что разность $h(\omega) - h(\alpha)$ лежит в подпространстве $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$. Ввиду произвольности столбца h получаем доказываемое утверждение. \square

Перейдем к доказательству теоремы 6. Обратимся к критерию идентифицируемости из теоремы 2. Ввиду леммы 3 имеем

$$\text{im } H + \text{im } \Delta H \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}.$$

С другой стороны, по условию доказываемой теоремы $s_i \notin Q_{2n}$, поэтому какой бы ни был ненулевой вектор Δp , будет верно $S\Delta p \notin Q_{2n}$ и тем более

$$S\Delta p \notin \ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)} \subset Q_{2n}.$$

Отсюда следует, что в уравнении

$$\Delta H - H\Delta P_H = S\Delta P_S$$

столбцы матрицы слева от знака равенства все лежат в $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$, а столбцы матрицы справа все не лежат в $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$. Следовательно, это уравнение, а вместе с ним и уравнение (17), совместно только при $\Delta H = 0$, $\Delta P_H = 0$, $\Delta P_S = 0$. По теореме 2, параметр $\theta \in \mathbb{R}^n$ глобально идентифицируем (без ограничения на область $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$). Теорема доказана.

Список литературы

1. *de Prony, Baron Gaspard Riche. Essai expérimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // Journal de l'École Polytechnique. 1795. V. 1. Cahier 22, 24–76.*
2. *Pereyra V., Scherer G. Exponential data fitting // Exponential Data Fitting and Its Applications. Bentham Science Publishers, 2010. P. 1–26.*
3. *Цыпкин Я. З. Адаптивно инвариантные дискретные системы управления // Автоматика и телемеханика. 1991. Н. 5. С. 96–124.*
4. *Андриевский Б. Р., Фуртат И. Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // Автоматика и телемеханика. 2020. Н. 9. С. 35–92.*
5. *Ломов А. А. Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. Н. 1. С. 25–37.*
6. *Ломов А. А. Совместная идентифицируемость коэффициентов линейных разностных уравнений объекта и аддитивных возмущений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. Вып. 4. С. 63–78.*

7. Ломов А. А. О состоятельности обобщенных орторегрессионных оценок параметров линейной динамической системы // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2013. Н. 4. С. 87–93.
8. Markovsky I., Pintelon R. Identification of linear time-invariant systems from multiple experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2015. V. 63(13). P. 3549–3554.
9. Householder A. S. *On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves*. Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee.
10. Марпл С. Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. М.: Мир, 1990.
11. Егоршин А. О. Метод наименьших квадратов и «быстрые» алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // *Автоматрия*. 1988. Н 1. С. 30–42.
12. Osborne M. R. A class of nonlinear regression problems // *Data Representation* / Eds. R. S. Anderssen and M. R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.
13. Егоршин А. О., Будянов В. П. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // *Автоматрия*. 1973. Н. 1. С. 78–82.
14. Osborne M. R., Smyth G. K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 1991. V. 12. P. 362–382.
15. Ломов А. А. О сходимости вычислительных алгоритмов в вариационной задаче идентификации коэффициентов разностных уравнений // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2020. Т. 83. Н. 3. С. 77–90.
16. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей*. М.: ГИФМЛ, 1959.

References

1. de Prony, Baron Gaspard Riche. Essai expérimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // *Journal de l'École Polytechnique*. 1795. V. 1. Cahier 22, 24–76.

2. Pereyra V., Scherer G. Exponential data fitting // *Exponential Data Fitting and Its Applications*. Bentham Science Publishers, 2010. P. 1–26.
3. Tsyppkin Ya. Z. Adaptively invariant discrete control systems // *Automation and remote control*. 1991. V. 52. No. 5. P. 673–696.
4. Andrievsky B. R., Furtat I. B. Disturbance Observers: Methods and Applications // *Automation and Remote Control*. 2020. V. 81. No. 9. P. 1563–1610.
5. Lomov A. A. Estimation of Trends and Identification of Time Series Dynamics in Short Observation Sections // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2009. V. 48. No. 1. P. 1–13.
6. Lomov A. A. Joint identifiability of coefficients of linear difference equations of object and additive disturbances // *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. V. 221. No. 6. P. 857–871.
7. Lomov A. A. On consistency of a generalized orthoregressive parameter estimator for a linear dynamical system // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2014. V. 7. No. 1. P. 1–7.
8. Markovsky I., Pintelon R. Identification of linear time-invariant systems from multiple experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2015. V. 63(13). P. 3549–3554.
9. Householder A. S. *On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves*. Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee.
10. Marple S. L. *Digital spectral analysis: with applications*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.
11. Egorshin A. O. Least squares method and the «fast» algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method) [in Russian] // *Avtometriya*. 1988. No. 1. P. 30–42.
12. Osborne M. R. A class of nonlinear regression problems // *Data Representation* / Eds. R. S. Anderssen and M. R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.
13. Egorshin A. O., Budyanov V. P. Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer [in Russian] // *Avtometriya*. 1973. No. 1. P. 78–82.

14. Osborne M.R., Smyth G.K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 1991. V. 12. P. 362–382.
15. Lomov A.A. On Convergence of Computational Algorithms for a Variational Problem of Identifying the Coefficients of Difference Equations // *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 2020. V. 14. No. 3. P. 541–554.
16. Gel'fond A. O. *Calculus of finite differences.* Hindustan Publ. Corp, 1971.

Информация об авторе

Андрей Александрович Ломов, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 7357-8545 AuthorID 4060
Scopus Author ID 57195387616

Author Information

Andrey A. Lomov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
SPIN 7357-8545 AuthorID 4060
Scopus Author ID 57195387616

*Статья поступила в редакцию 27.05.2024;
одобрена после рецензирования 10.06.2024; принята к публикации
13.06.2024*

*The article was submitted 27.05.2024;
approved after reviewing 10.06.2024; accepted for publication 13.06.2024*